二项式的扭 L 函数的牛顿折线

张神星

山东大学第六届齐鲁青年论坛
山东·青岛

2021 年 9 月 29 日

指数和

设 p 是素数, $\mathbb{F}_q$ 是含有 $q=p^a$ 个元素的有限域. 对于 $f(x)\in\mathbb{F}_q[x]$, 定义

$$\text{指数和}\quad S_k(f) := \sum_{x\in\mathbb{F}_{q^k}} \zeta_p^{\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^k}/\mathbb{F}_p}(f(x))} \in \mathbb{Z}[\zeta_p].$$

我们要问:

- 作为一个复数, $|S_k(f)| =?$
- 作为一个 p 进数, $|S_k(f)|_p =?$
- 作为一个代数整数, $\deg S_k(f) =?$

L 函数的有理性

我们今天来考虑第二个问题. 定义 f 的 L 函数为

$$L(s,f) := \exp\left(\sum_k S_k(f)\frac{s^k}{k}\right)$$

定理 (Dwork-Bombieri-Grothendick)

$L(s,f)$ 是有理函数.

指数和的变化

我们来修改和推广下指数和的定义. 设

- $\psi_m : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p^\times$ 是一个阶为 p^m 的加性特征;
- $\omega^{-u} : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{C}_p^\times$ 是一个乘性特征, 其中 ω 是 Teichmüller 提升, $0 \le u \le q-2$.

定义

$$S_{k,u}(f,\psi_m) = \sum_{x\in\mathbb{F}_{q^k}^\times} \psi_m\left(\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_{q^k}/\mathbb{Q}_p}\left(\hat{f}(\hat{x})\right)\right)\omega^{-u}\left(\mathrm{Nm}_{\mathbb{F}_{q^k}/\mathbb{F}_q}(x)\right),$$

$$L_u(s,f,\psi_m) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} S_{k,u}(f,\psi_m)\frac{s^m}{m}\right).$$

L 函数是多项式

定理 (Adolphson-Sperber, 李文卿, 刘春雷-魏达盛, 刘春雷)

如果 $p \nmid d = \deg f$, 则 $L_u(s, f, \psi_m)$ 是次数为 $p^{m-1}d$ 的多项式.

记

$$L_u(s, f, \psi_m) = \sum_{n=0}^{p^{m-1}d} a_n s^n = \prod_i (1 - \alpha_i s), \quad S_{u,k}(f) = \sum_i \alpha_i^k.$$

为了了解 $S_{u,k}(f)$ 的 p 进性质, 我们需要了解 α_i 的赋值. 而它们正是该 L 函数的牛顿折线的斜率, 其中牛顿折线是指所有

$$\big(n, \mathrm{ord}_p(a_n)\big)$$

的下凸包.

T 进指数和和 T 进 L 函数

为了统一考虑不同 m 对应的牛顿折线, 我们引入 T 进指数和和 T 进 L 函数:

$$S_{k,u}(f,T)=\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^k}^{\times}}(1+T)^{\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_{q^k}/\mathbb{Q}_p}(\hat{f}(\hat{x}))}\omega^{-u}\left(\mathrm{Nm}_{\mathbb{F}_{q^k}/\mathbb{F}_q}(x)\right),$$

$$L_u(s,f,T)=\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}S_{k,u}(f,T)\frac{s^k}{k}\right)\in 1+s\mathbb{Z}_q[\![T]\!][\![s]\!].$$

我们有 $L_u(s,f,\psi_m)=L_u(s,f,\pi_m)$, 其中 $\pi_m=\psi_m(1)-1$.

特征函数

注意到 $L_u(s,f,T)$ 是一个形式幂级数, 想要建立它和原始的 L 函数的牛顿折线的联系不够方便. 定义特征函数

$$C_u(s,f,T)=\prod_{j=0}^{\infty}L_u(q^js,f,T)\in 1+s\mathbb{Z}_q[\![T]\!][\![s]\!],$$

则

$$L_u(s,f,T)=\frac{C_u(s,f,T)}{C_u(qs,f,T)}.$$

牛顿折线的关系

记

- $\mathrm{NP}_{u,m}(f) = C_u(s, f, \pi_m)$ 的 $\pi_m^{a(p-1)}$ 进牛顿折线 (不依赖 ψ_m);
- $\mathrm{NP}_{u,T}(f) = C_u(s, f, T)$ 的 $T^{a(p-1)}$ 进牛顿折线.
- $H^{\infty}_{[0,d],u}$ 为扭霍奇折线, 其斜率为 $\frac{n}{d} + \frac{1}{bd(p-1)} \sum_{k=1}^{b} u_k$, $n \in \mathbb{N}$, 其中 b 是满足 $p^b u \equiv u \bmod q-1$ 的最小正整数,

$$u = u_0 + u_1 p + \cdots + u_{a-1} p^{a-1}, \ 0 \leq u_i \leq p-1.$$

这样规范化后的牛顿折线满足

$$\mathrm{NP}_{u,m}(f) \geq \mathrm{NP}_{u,T}(f) \geq H^{\infty}_{[0,d],u}.$$

由定义可知 $\mathrm{NP}_{u,m}(f)$ 完全由它在 $[0, d-1]$ 上的值决定.

二项式情形的已知结果

现在我们考虑 $f(x) = x^d + \lambda x^e$ 的情形. 由于 $(d, e) > 1$ 时可以化归到扭的情形, 我们不妨设 $(d, e) = 1$. 如下情形是已知的:

- $u = 0$:
  - $p \equiv 1 \bmod d$, 此时 $\mathrm{NP}_{u,m}(f) = H^{\infty}_{[0,d],u}$.
  - $e = 1$, 有很多人计算过, 不在此列举.
  - $e = d - 1, p \equiv -1 \bmod d$, 欧阳毅-张.
  - $e = 2, p \equiv 2 \bmod d$, Zhang Qingjie-牛传择.
- 任意 u, $e = 1$, 刘春雷-牛传择.

p 进 Artin-Hasse 函数

我们需要 T 进 Dwork 迹公式来计算牛顿折线. 定义

$$E(X) = \exp\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^{-i} X^{p^i}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n X^n \in \mathbb{Z}_p[\![X]\!],$$

$$E_f(X) = E(\pi X^d) E(\pi \hat{\lambda} X^e) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n X^n,$$

则

$$\gamma_k = \sum \pi^{x+y} \lambda_x \lambda_y \hat{\lambda}^y,$$

其中 (x, y) 取遍 $dx + ey = k$ 的所有非负整数解.

T 进 Dwork 半线性算子

定义

$$\mathcal{B}_u = \left\{ \sum_{v \in M_u} b_v \pi^{\frac{v}{d}} X^v \mid b_v \in \mathbb{Z}_q[\![\pi^{\frac{1}{d(q-1)}}]\!] \to 0(\pi\text{进}) \right\}, \quad M_u = \frac{u}{q-1} + \mathbb{N},$$

$$\psi : \mathcal{B}_u \longrightarrow \mathcal{B}_{p^{-1}u}, \quad \sum_{v \in M_u} b_v X^v \longmapsto \sum_{v \in M_{p^{-1}u}} b_{pv} X^v,$$

则

$$\Psi := \sigma^{-1} \circ \psi \circ E_f : \mathcal{B}_u \to \mathcal{B}_{p^{-1}u}$$

是一个半线性算子, 其中 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_q/\mathbb{Q}_p)$ 是 Frobenius. 那么它定义了 $\mathcal{B} := \bigoplus_{i=0}^{b-1} \mathcal{B}_{p^i u}$ 上的算子, 且 Ψ^a 是 $\mathbb{Z}_q[\![\pi^{\frac{1}{d(q-1)}}]\!]$ 线性的.

T 进 Dwork 迹公式

定理

我们有

$$C_u(s,f,T) = \det\left(1 - \Psi^a s \mid \mathcal{B}_u/\mathbb{Z}_q[\![\pi^{\frac{1}{d(q-1)}}]\!]\right).$$

因此 $C_u(s,f,T)$ 的 T 进牛顿折线是

$$\left(n, \frac{1}{b}\operatorname{ord}_T(c_{abn})\right), \; n \in \mathbb{N},$$

的凸包, 其中

$$\det\left(1 - \Psi s \mid \mathcal{B}/\mathbb{Z}_p[\![\pi^{\frac{1}{d(q-1)}}]\!]\right) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^n c_n s^n.$$

矩阵表达

记 $s_k \equiv p^k u \bmod q-1$, $0 \le s_k \le q-2$. 设 $\xi_1, \dots, \xi_a$ 为 $\mathbb{Q}_q/\mathbb{Q}_p$ 的一组正规基, 则

$$\left\{\xi_v(\pi^{\frac{1}{d}}X)^{\frac{s_k}{q-1}+i}\right\}_{(i,v,k)\in\mathbb{N}\times I_a\times I_b}$$

是 $\mathcal{B}/\mathbb{Z}_p[\![\pi^{\frac{1}{d(q-1)}}]\!]$ 的一组基, 对应的矩阵为

$$\Gamma = \left(\gamma_{(v,\frac{s_k}{q-1}+i),(w,\frac{s_\ell}{q-1}+j)}\right)_{\mathbb{N}\times I_a\times I_b} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Gamma^{(b-1)} \\ \Gamma^{(b)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $c_{bn} = \sum_{A\in\mathcal{A}_n} \det(A)$, $\mathcal{A}_n$ 为全体 bn 阶主子式, 且 $A^{(k)} = A \cap \Gamma^{(k)}$ 均为 n 阶.

进一步化归

我们有

$$\xi_w^{\sigma^{-1}} \gamma_{\left(\frac{s_{k-1}}{q-1}+i, \frac{s_k}{q-1}+j\right)}^{\sigma^{-1}} = \sum_{u=1}^{a} \gamma_{\left(v, \frac{s_{k-1}}{q-1}+i\right), \left(w, \frac{s_k}{q-1}+j\right)} \xi_v,$$

其中

$$\gamma_{\left(\frac{s_{k-1}}{q-1}+i, \frac{s_k}{q-1}+j\right)} = \pi^{\frac{s_k - s_{k-1}}{d(q-1)} + \frac{j-i}{d}} \gamma_{pi-j+u_{-k}}.$$

于是

$$\operatorname{ord}_\pi \left(\gamma_{\left(v, \frac{s_{k-1}}{q-1}+i\right), \left(w, \frac{s_k}{q-1}+j\right)} \right) \geq \operatorname{ord}_\pi \left(\gamma_{\left(\frac{s_{k-1}}{q-1}+i, \frac{s_k}{q-1}+j\right)} \right)$$

$$= \frac{s_k - s_{k-1}}{d(q-1)} + \frac{j-i}{d} + \phi(pi - j + u_{-k}),$$

其中 $\phi(n) = \min\{x + y \mid dx + ey = n, x, y \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$

再进一步化归

引理 (主子式赋值)

对于 $\tau \in S_n^*$ 和整数 t, 我们有

$$\sum_{i=0}^{n} \phi(pi - \tau(i) + t) \geq d^{-1} \left(\frac{(p-1)n(n+1)}{2} + (n+1)t + (d-e)C_{t,n} \right).$$

其中 ($\overline{x}$ 指 $x \bmod d$ 最小非负剩余)

$$C_{t,n} = \min_{\tau \in S_n^*} \sum_{i=0}^{n} \overline{e^{-1}(pi - \tau(i) + t)} = \sum_{i=0}^{n} (R_{i,\alpha} + r_{i,\alpha}) - d\mathbf{C}_{t,n,\alpha},$$

$$R_{i,\alpha} = \overline{e^{-1}(pi+\alpha)},\ \ r_{i,\alpha} = \overline{e^{-1}(t-\alpha-i)}$$

$$\mathbf{C}_{t,n,\alpha} = \max \# \left\{ i \in I_n^* \mid R_{i,\alpha} + r_{\tau(i),\alpha} \geq d \right\}.$$

牛顿折线的下界

对于 $A \in \mathcal{A}_{a(n+1)}$, 设 $\mathcal{R}$ 为其指标集, 则

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{b} \det(A^{(k)}) = \sum_{\tau} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i \in \mathcal{R}} \gamma_{i,\tau(i)},$$

其中置换 τ 满足 $\tau(\mathcal{R}^{(k-1)}) = \mathcal{R}^{(k)}$. 它的每一项赋值不小于

$$S_{\mathcal{R}}^{\tau} \geq d^{-1} \sum_{k=1}^{b} \sum_{i \in \mathcal{R}^{(k-1)}} \Big((p-1)i' + (d-e)\overline{e^{-1}(pi' - \tau(i)' + u_{-k})} \Big).$$

这里 i' 表示 $i \in \mathbb{N} \times I_a$ 的第一个分量. 根据前面的估计, 我们有

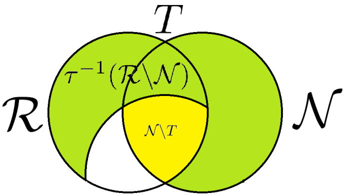
$$S_{\mathcal{N}}^{\sigma} \geq ab(p-1)P_{u,e,d}(n+1),$$

其中 $\mathcal{N} := I_n^* \times I_a \times I_b$, $P_{u,e,d}$ 为由前述估计给出的折线. 若对任意 τ, 存在 σ 使得 $S_{\mathcal{R}}^{\tau} \geq S_{\mathcal{N}}^{\sigma}$, 那么 $P_{u,e,d}$ 就是牛顿折线的一个下界.

牛顿折线的下界

记 $m=\#(\mathcal{R}\backslash\mathcal{N})$, $T=(\mathcal{N}\backslash\mathcal{R})\cup\tau^{-1}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{N})$. 选择 σ 使得在 $\mathcal{N}\backslash T$ 上和 τ 相同. 则

$$
\begin{aligned}
& d(S_{\mathcal{R}}^{\tau}-S_{\mathcal{N}}^{\sigma}) \\
\geq & \left(\sum_{i\in\mathcal{R}\backslash\mathcal{N}}-\sum_{i\in\mathcal{N}\backslash\mathcal{R}}\right)(p-1)i'-\sum_{k=1}^{b}\sum_{i\in T\cap\mathcal{N}^{(k)}}(d-e)\overline{e^{-1}(pi'-\tau(i)'+u_{-k})} \\
\geq & m(p-1)-2m(d-e)(d-1)>0, \quad p>(d-e)(2d-1).
\end{aligned}
$$



何时达到下界

模掉更高阶项后，我们有

$$
\begin{aligned}
c_{ab(n+1)} = \sum_{A\in\mathcal{A}_{a(n+1)}} \det(A) &\equiv \det\Big(\big(\gamma_{i,j}\big)_{i,j\in\mathcal{N}}\Big) \\
&= \pm\,\mathrm{Nm}\left(\prod_{k=1}^{b} \det\left(\gamma_{\left(\frac{s_{k-1}}{q-1}+i,\frac{s_k}{q-1}+j\right)}\right)_{i,j\in I_n^*}\right) \\
&= \pm\mathrm{Nm}\left(\prod_{k=1}^{b} \det\big(\gamma_{pi-j+u_k}\big)_{i,j\in I_n^*}\right) \\
&\equiv \pm\pi^{ab(p-1)P_{u,e,d}(n+1)}\mathrm{Nm}\left(\prod_{k=1}^{b} \hat{\lambda}^{v_{u_k,n}} h_{n,k}\right),
\end{aligned}
$$

Hasse 常数

其中

$$h_{n,k} := \sum_{\tau \in S^{\circ}_{u_k,n}} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=0}^{n} \frac{1}{x^{\tau}_{u_k,i}!\, y^{\tau}_{u_k,i}!},$$

$$dx^{\tau}_{u_k,i} + ey^{\tau}_{u_k,i} = pi - \tau(i) + t, \quad 0 \le y \le d-1.$$

因此当且仅当所有的 $h_{n,k} \in \mathbb{Z}_p^{\times}$ 时,

$$\mathrm{NP}_{u,m}(f) = \mathrm{NP}_{u,T}(f) = P_{u,e,d}.$$

一个例子

当 $e = d-1$ 时, 若 $p > (d^2-d-1)\mathrm{order}(\omega^{-u})$, 我们有

$$h_{n,k} \equiv \det\left(\frac{1}{(-d^{-1}ev_i + u_k(1-d^{-1}e) - j)!(v_i+j)!}\right)$$

$$\equiv \prod_{i=0}^{n} \frac{\left(d^{-1}e(i-t)+t\right)_i}{\left(-d^{-1}ev_i + u_k(1-d^{-1}e)\right)! \cdot (v_i+n)!} \cdot \prod_{0\le i<j\le n} (v_i - v_j) \not\equiv 0 \bmod p.$$

因此此时 $\mathrm{NP}_{u,m}(f) = \mathrm{NP}_{u,T}(f) = P_{u,e,d}$.

一个猜想

猜想

若 p 相对 d 和 ω^{-u} 的阶都很大, 则 $\mathrm{NP}_{u,m}(f) = \mathrm{NP}_{u,T}(f) = P_{u,e,d}$.

感谢各位的倾听!